

4. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 14. November* um 12 Uhr.

Aufgabe 1.

- (1) Zeigen Sie, dass jedes $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ gegeben ist durch Verknüpfung von Abbildungen der Form $z \mapsto az + b$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ sowie eventuell von den Abbildungen $z \mapsto -\frac{1}{z}$ und $z \mapsto -\bar{z}$.
- (2) Es seien $z, z' \in \mathbb{H}$ Punkte in $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass es ein $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ gibt, welches z und z' vertauscht, d.h. so dass $m(z) = z'$ und $m(z') = z$.

Aufgabe 2.

- (1) Es sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ein Homöomorphismus, welcher hyperbolische Geraden in hyperbolische Geraden überführt. Zeigen Sie, dass $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$.
Hinweis: Wir haben eine ähnliche Aussage für $\overline{\mathbb{C}}$ gezeigt. Aber wie verwendet man das Ergebnis wohl am geschicktesten?
- (2) Es sei $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ mit genau einem Fixpunkt $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Horokreise an x unter m erhalten bleiben.

Zur Erinnerung: Ein Horokreis in $x \in \mathbb{R}$ ist eine Menge von der Form

$$\{z \in \mathbb{H} \mid |z - (x + iy)| = y\}$$

für ein $y > 0$.

Aufgabe 3. Es sei M eine Mannigfaltigkeit und λ ein Längenmaß auf M . Zeigen Sie, dass

$$d_\lambda(x, y) := \inf\{\text{Länge}_\lambda(p) \mid p \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y\}$$

die Dreiecksungleichung erfüllt.

Aufgabe 4. Es sei $\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten $\mathbb{C}$ mit dem Längenmaß $\rho|dz|$.

- (1) Gibt es dann zu jedem Paar $P, Q \in \mathbb{C}$ eine, bis auf Umparametrisierung, eindeutig bestimmte Geodäte von P nach Q ?
- (2) Eine Mannigfaltigkeit M mit einem Längenmaß heißt *vollständig*, wenn es zu jeder Geodäte $p: [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ gibt, so dass $f|_{[a, b]} = p$. Ein Raum ist also vollständig, wenn man jede Geodäte beliebig fortsetzen kann.
Ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}$ mit dem Längenmaß $\rho|dz|$ notwendigerweise vollständig?

Begründen Sie in beiden Fällen Ihre Antwort.